

INTERPOLASI LENGKUNG BEZIER KUADRATIK

Khadijah Nasuha binti Che Halipa¹ Anisah binti Jawawi²

¹Jabatan Sains Matematik, Fakulti Sains Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia

²Jabatan Matematik Sains Komputer,
Politeknik Kota Bharu, Kok Lanas, 16450 Ketereh Kelantan Malaysia

knasuha0912@gmail.com¹, anisah@pkb.edu.my²

Received 5 May 2021: Accepted 25 May 2021: Available Online 1 September 2021

Abstrak

Dalam bidang matematik khususnya kaedah berangka, interpolasi adalah suatu kaedah yang digunakan untuk membina titik data yang baharu dalam julat set diskret yang diketahui titik datanya. Dengan menggunakan interpolasi lengkung kuadratik, masalah interpolasi lengkung Bezier dalam fon komputer dapat diselesaikan. Aplikasi lengkung Bezier dalam bidang fon komputer akan dikaji menggunakan lengkung komposit kuadratik. Lengkung Bezier kuadratik merupakan suatu lengkung yang terbentuk berdasarkan ketiga-tiga titik kawalannya. Dengan menentukan titik kawalan, lengkung licin dapat dihasilkan. Oleh yang demikian, persamaan parametrik diperolehi berdasarkan titik kawalan yang telah ditentukan. Dengan menggunakan formula yang dinyatakan di bahagian kaedah kajian, persamaan parametrik akan dihasilkan. Seterusnya dengan memplot nilai persamaan parametrik, lengkung Bezier kuadratik akan diperolehi. Bagi menilai sesuatu lengkungan, kelicinan lengkung tersebut diperhatikan. Di dalam kajian ini, huruf 's' akan diperolehi dengan menggunakan lengkung Bezier kuadratik komposit. Didapati bahawa kelicinan lengkung Bezier ini bergantung terhadap bilangan titik kawalan. Semakin tinggi bilangan titik kawalan, semakin licin lengkungan yang dihasilkan. Dengan menggunakan tiga titik kawalan yang telah ditentukan, lengkung Bezier komposit dapat dihasilkan dengan baik.

Kata kunci: Matematik, kaedah berangka, interpolasi, lengkung Bezier, titik kawalan, persamaan parametrik

Pengenalan

Penjanaan lengkung licin melalui titik data merupakan masalah yang berabad lamanya. Adalah sukar difahami bagaimana lengkung yang dilukis pelukis muncul lebih baik daripada yang dapat dijana secara automatik oleh algoritma berkomputer (Piegl 1987). Namun begitu, melukis sebarang bentuk secara manual tetapi jitu adalah sangat merumitkan dan mengambill masa yang lama. Secara lazimnya, pengguna mahu menjana lengkung dengan cepat tetapi mudah dikawal dan senang dihitng. Dalam grafik berkomputer, ini adalah masalah yang utama dan merupakan dorongan untuk mereka membentuk lengkung.

Safraz dan Razzak (2002) telah mengemukakan suatu kaedah mudah dan berkesan untuk merekabentuk lengkung yang optimal untuk paparan garis luaran dengan lengkung kubik Bezier dan Hermite. Kewujudan parameter kawalan boleh menghasilkan bentuk yang lebih sesuai. Tambahan lagi Piegl (1987) mencadangkan suatu algoritma yang menggabungkan teknik interaktif dan kaedah interpolasi untuk membantu pereka bentuk menghasilkan lengkung interpolasi yang lebih menarik. Piegl mencadangkan penjanaan lengkung interpolasi yang merupakan gabungan cebisan lengkung Bezier kuadratik yang dikawal secara setempat dengan menggunakan parameter bentuk.

Menurut Heath (2002), untuk sesuatu data yang diberi, misalkan $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_m, y_m)$ dengan $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ masalah interpolasi adalah untuk menentukan fungsi $f: \square \rightarrow \square$ sehinggakan $f(t_i) = y_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Antara tujuan interpolasi digunakan adalah untuk

1. memplot lengkung licin melalui titik data diskret,
2. membaca antara setiap baris dalam sesuatu jadual,
3. membezakan atau mengkamirkan data berjadual,
4. menggantikan sesuatu fungsi yang rumit kepada lebih ringkas.

Perwakilan lengkung Bezier adalah satu daripada perwakilan utama yang popular diguna pakai bagi penjanaan lengkungan dan permukaan (Marsh 1999). Lengkung Bezier ditakrifkan sebagai satu

lengkung berparameter, $Q(t)$ yang merupakan fungsi polinomial bagi parameter t . Kebanyakan penyelidik telah menggunakan lengkung Bezier kerana ia mampu menghasilkan lengkung yang baik dan licin (Rusdi & Yahya 2014). Selain itu, didapati bahawa terdapat pelbagai jenis fon yang telah dihasilkan dengan menggunakan lengkung Bezier. Siti Mariam Ismail et.al (2016) menyatakan bahawa aplikasi reka bentuk berbantuan komputer dan reka bentuk geometri berbantuan komputer menggunakan perwakilan Bezier dalam menghasilkan lengkung kerana sifatnya yang menarik dan stabil dalam pengiraan.

Kaedah Kajian

Lengkung Bezier kuadratik ialah lengkung yang mempunyai darjah kebebasan dua. Bilangan titik kawalan di dalam lengkung Bezier ini ialah tiga. Tiga titik tersebut merupakan dua titik yang berada di atas lengkung yang disebut sebagai titik awal dan titik akhir manakala satu lagi titik yang tidak berada di atas lengkung tetapi akan mengawalkan dan menentukan bentuk lengkung. Contohnya apabila menggantikan nilai $n = 2$ untuk lengkung Bezier kuadratik, persamaan di bawah diperolehi

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_{i,x}, P_{i,y}$$

$B_i^n(t)$ boleh ditulis sebagai

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i$$

Persamaan tersebut disebut sebagai polinomial Bernstein. Dengan mengembangkan persamaan berikut, persamaan di bawah dihasilkan

$$Q(t) = B_0(t)P_{2,0} + B_1(t)P_{2,1} + B_2(t)P_{2,2}$$

Seterusnya, masukkan setiap nilai yang ditentukan ke dalam persamaan tersebut

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= \frac{2!}{0!(2-0)!} t^0 (1-t)^{2-0} \\ &= 1-t^2 \end{aligned}$$

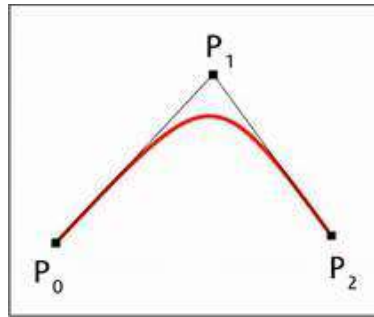
$$\begin{aligned} B_1^2(t) &= \frac{2!}{1!(2-1)!} t^1 (1-t)^{2-1} \\ &= 2(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^2(t) &= \frac{2!}{2!(2-2)!} t^2 (1-t)^{2-2} \\ &= t^2 \end{aligned}$$

Seterusnya, masukkan nilai polinomial Bernstein tersebut ke dalam persamaan lengkung Bezier, $Q(t)$

$$Q(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

Berikut merupakan contoh lengkung Bezier kuadratik yang berdarjah dua dan mempunyai tiga titik kawalan.

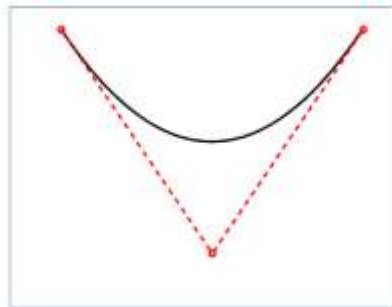


Rajah 1: Lengkung bezier kuadratik

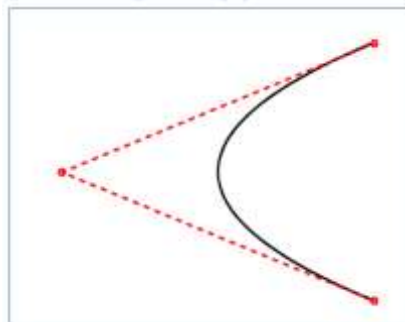
Sumber: http://www.ecartouche.ch/content_reg/cartouche/graphics/en/html/Curves_learning_Object2.html

Berdasarkan rajah, lengkung tersebut mempunyai tiga titik kawalan iaitu P_0, P_1 dan P_2 . Darjah kebebasan bagi lengkung ini ialah dua. Oleh yang demikian, ia merupakan lengkung Bezier kuadratik. Lengkung tersebut ditakrifkan oleh ketiga-tiga titik kawalannya. Oleh itu, P_0 dan P_2 merupakan titik mula dan titik akhir yang berada di atas lengkung manakala titik P_1 merupakan titik yang tidak berada di atas lengkung tetapi akan menentukan bentuk lengkung tersebut. Berikut merupakan beberapa contoh lengkung Bezier kuadratik yang berbeza kerana kedudukan titik kawalan yang berbeza.

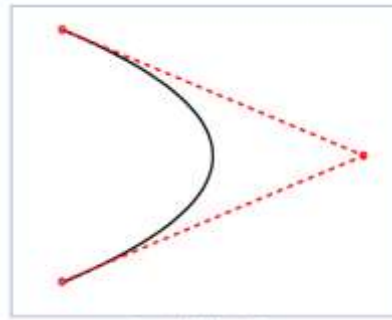
Rajah 2 merupakan lengkung Bezier kuadratik apabila titik kawalan yang mengawal bentuk lengkung berada di bawah. Manakala rajah 3 merupakan lengkung Bezier kuadratik apabila titik kawalan mengawal bentuk lengkung berada di kiri. Kemudian rajah 4 merupakan lengkung Bezier kuadratik apabila titik kawalan yang mengawal bentuk lengkung berada di kanan.



Rajah 2: Lengkung bezier kuadratik apabila titik kawalan di bawah
 Sumber: Mohd Fikri Baharuddin 2010.



Rajah 3: Lengkung bezier kuadratik apabila titik kawalan di kiri
 Sumber: Mohd Fikri Baharuddin 2010



Rajah 4: Lengkung bezier kuadratik apabila lengkung kawalan di kanan
 Sumber: Mohd Fikri Baharuddin 2010

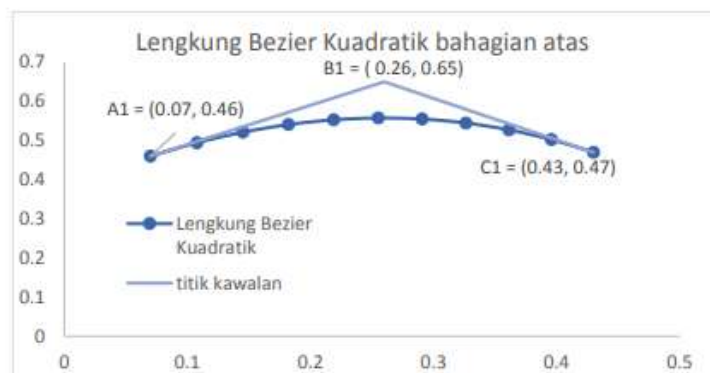
Dapatan Kajian

Pengguna utama lengkung Bezier ialah fon komputer. Oleh yang demikian, kajian ini akan membincangkan tentang penghasilan fon melalui kaedah interpolasi lengkung Bezier komposit kuadratik menggunakan Microsoft excel.

Bagi menghasilkan huruf ‘s’, tiga lengkung Bezier kuadratik perlu dihasilkan terlebih dahulu. Lengkung-lengkung tersebut merupakan lengkung bahagian atas, bahagian tengah dan bahagian bawah huruf ‘s’. Titik A1 (0.07,0.46) dan C1 (0.43,0.47) merupakan titik awal dan titik akhir manakala titik B1 (0.26, 0.65) pula merupakan titik yang menentukan bentuk lengkung.

Bagi mendapatkan lengkung Bezier kuadratik yang mewakili lengkung bahagian atas, nilai persamaan parametrik, $Q_x(t)$ dan $Q_y(t)$ dihasilkan dengan menggunakan formula yang telah dinyatakan di bahagian kaedah kajian. Dengan memasukkan nilai titik kawalan yang telah ditentukan dan nilai t yang perlu berada di antara nilai 0 dan 1 ke dalam formula, nilai persamaan parametrik dihasilkan.

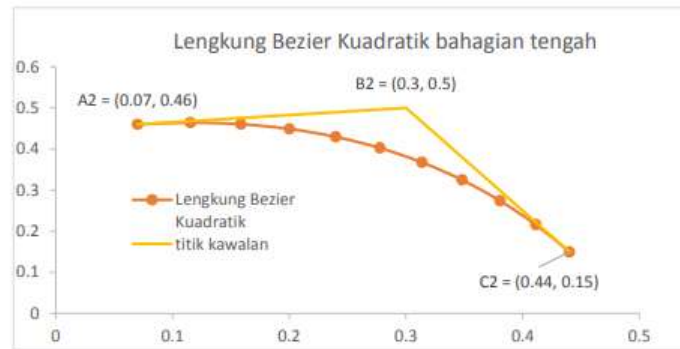
Kemudian, lengkung Bezier kuadratik yang mewakili bahagian atas huruf ‘s’ dihasilkan dengan memplot nilai $Q_x(t)$ dan $Q_y(t)$ menggunakan Microsoft excel seperti rajah 5.



Rajah 5: Lengkung bahagian atas huruf ‘s’ yang dihasilkan menggunakan interpolasi lengkung bezier kuadratik

Seterusnya, satu lagi lengkung Bezier kuadratik yang mewakili bahagian tengah huruf ‘s’ dihasilkan. Data titik-titik kawalan untuk mendapatkan lengkung Bezier kuadratik yang mewakili bahagian tengah ialah titik A2 (0.07, 0.46) dan C2 (0.44,0.15) merupakan titik awal dan titik akhir manakala titik B2 (0.30,0.50) merupakan titik yang menentukan bentuk lengkung. Bagi mendapatkan lengkung Bezier kuadratik yang mewakili lengkung bahagian bawah, nilai persamaan $Q_x(t)$ dan $Q_y(t)$ diperolehi dengan menggunakan formula yang dinyatakan di kaedah kajian.

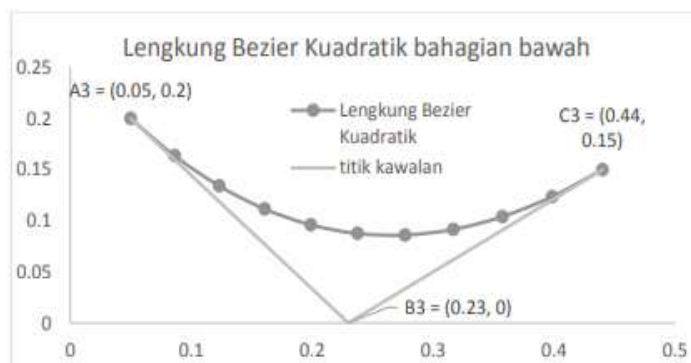
Kemudian, lengkung Bezier kuadratik yang mewakili bahagian tengah dihasilkan dengan memplot nilai $Q_x(t)$ dan $Q_y(t)$ dengan menggunakan Microsoft excel seperti rajah 6.



Rajah 6: Lengkung bahagian tengah huruf ‘s’ yang dihasilkan menggunakan interpolasi lengkung Bezier kuadratik

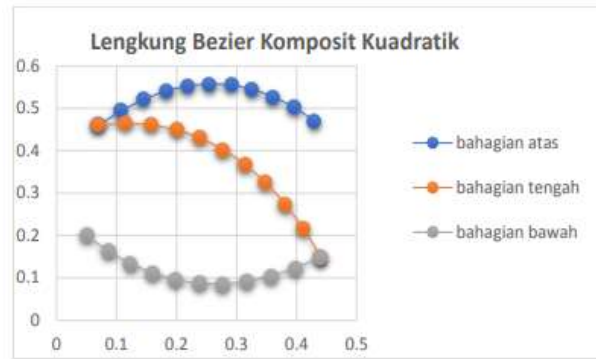
Seterusnya, lengkung Bezier kuadratik terakhir yang mewakili bahagian bawah huruf ‘s’ dihasilkan. Data titik-titik kawalan untuk mendapatkan lengkung Bezier kuadratik yang mewakili bahagian bawah seperti yang ditunjukkan di lampiran E. Titik A3 (0.05,0.2) dan C3 (0.44,0.15) merupakan titik awal dan titik akhir manakala titik B3 (0.23,0) merupakan titik yang menentukan bentuk lengkung. Bagi mendapatkan lengkung Bezier kuadratik yang mewakili lengkung bahagian bawah, nilai persamaan $Q_x(t)$ dan $Q_y(t)$ diperolehi dengan menggunakan formula yang dinyatakan di kaedah kajian.

Kemudian, lengkung Bezier kuadratik yang mewakili bahagian bawah dihasilkan dengan memplot nilai $Q_x(t)$ dan $Q_y(t)$ dengan menggunakan Microsoft excel seperti rajah 7.



Rajah 7: Lengkung bahagian bawah huruf ‘s’ yang dihasilkan menggunakan interpolasi lengkung bezier kuadratik

Ketiga-tiga lengkung yang dihasilkan di atas digabungkan dengan menggunakan Microsoft excel bagi mendapatkan lengkung Bezier komposit kuadratik mewakili fon berhuruf ‘s’ ialah seperti rajah 8 di bawah.



Rajah 8: Lengkung bezier komposit kuadratik

Kesimpulan

Kesimpulannya, huruf 's' yang lengkap dapat dihasilkan dengan menggunakan interpolasi lengkung Bezier komposit kuadratik melalui Microsoft excel. Dengan menggunakan satu titik yang menentukan bentuk lengkung dan dua titik hujung, lengkung Bezier kuadratik dihasilkan. Interpolasi lengkung Bezier komposit huruf 's' memerlukan tiga jenis lengkung iaitu lengkung yang mewakili bahagian atas huruf 's' seperti rajah 5, bahagian tengah huruf 's' seperti yang ditunjukkan rajah 6 dan bahagian bawah huruf 's' seperti yang ditunjukkan rajah 7. Setelah menggabungkan ketiga-tiga lengkung tersebut dengan menggunakan Microsoft excel, rajah 8 dihasilkan. Kesimpulannya, bentuk lengkung Bezier kuadratik dipengaruhi oleh kedudukan atau nilai titik kawalannya.

Pengakuan

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

Rujukan

- Heath, M. T. (2002). *Scientific Computing: An Introduction Survey*. Slaid. Urbana: University of Illinois
- Marsh, D. (1999). *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. London: Springer Verlag Limited.
- Mohd Fikri Baharuddin. (2010). *Bezier Method for Image Processing*. Tesis Ijazah Sarjanamuda. Kuala Lumpur: Universiti Teknologi Petronas.
- Muhammad Abbas, Ena Jamal, Jamaludin Md. Ali. (2011). *Bezier curve Interpolation Constructed by a Line* 5(37):1817-1832. Penang: School of Mathematical Sciences
- Piegl, L. (1987). Interactive data interpolation by rational Bezier curves. *Computer Graphics and applications, IEEE* 7(4):45-48
- Rusdi, N.A. & Yahya, Z.R. (2014). Reconstruction of generic shape with cubic Bezier using Least Square Method. International Conference on Mathematics, Engineering & Industrial Applications 28-30 May. Penang: Preprint
- Safraz, M and Razzak, M. F. A. (2002). An Algorithm for automatic capturing of the font outliners. *Computers & Graphics*, 26(5): 795-804
- Siti Mariam Ismail, Nurul Husna Hassan, Marwin Tan, Norasrani Ramli & Zaifilla Farrina. 2016. Applications of Disc Bezier Curve in Designing Wide Font. Technical Foundation Studies. Kedah: UniKL Spanish Institute.
- Stopper. R, Bar. H, Schnabel. O. (2012). Computer Graphic. *Quadratic and cubic Bezier curve*.